

**CALCULO AERODINAMICO DE COMPRESORES Y TURBINAS**

**POR**

**CARLOS SÁNCHEZ TARIFA**

## INTRODUCCION

En los últimos años ha progresado considerablemente el estudio aerodinámico de toda clase de compresores y turbinas. Las antiguas teorías unidimensionales o casi-unidimensionales con las que se proyectaban las turbinas de vapor y los compresores centrífugos, han ido sustituyéndose por teorías mucho más completas en las que se estudia la corriente en dos e incluso en tres dimensiones [1, 2, 3 y 4].

No obstante, el estudio de la corriente en un compresor o turbina utilizando las ecuaciones diferenciales generales de Navier-Stokes de un fluido viscoso y compresible, no resulta posible por el carácter no lineal de dichas ecuaciones, que no las hace asequibles ni aun a los métodos numéricos de cálculo.

Por tanto, es norma general prescindir de la viscosidad en el estudio del campo de velocidades, lo que es posible gracias a que su influencia se circunscribe a la capa límite, de muy pequeño espesor en esta clase de máquinas. Esta hipótesis no sería válida, por ejemplo, si los álabes trabajasen en pérdida, pues el desprendimiento de la capa límite originado por la viscosidad alteraría profundamente el campo de velocidades. Posteriormente, las pérdidas de presión producidas por la viscosidad se tienen en cuenta como una corrección a los resultados obtenidos utilizando las fórmulas de los fluidos ideales, proporcionando fundamentalmente estas últimas la potencia y tamaño de la máquina, mientras que las pérdidas friccionales influyen decisivamente en el rendimiento.

Aun prescindiendo de la viscosidad, la resolución general del problema en corriente tridimensional es en extremo difícil, por lo que han de admitirse otras simplificaciones. La hipótesis de simetría axial conduce a los denominados «métodos de las líneas de corriente», en los que las ecuaciones del movimiento se integran sobre superficies de corriente simétricas respecto al eje de giro. A esta clase de cálculos, aunque generalmente muy simplificados, pertenecen la mayoría de los métodos con que se proyectan los compresores y turbinas.

El trabajo que aquí se presenta pertenece también a esta clase. Se admite en él la hipótesis de simetría axial, pero se consideran las desviacio-

nes radiales de las líneas de corriente y el posible carácter no isentrópico de la corriente flúida. Resulta, por tanto, un método de considerable alcance y será aplicable al estudio de compresores diagonales de álabes radiales o con pequeña desviación radial y a toda clase de compresores y turbinas axiales.

En el caso de turbinas axiales, Holmquist [5] ha desarrollado un método de cálculo basado en hipótesis semejantes, aunque el procedimiento de integración de las ecuaciones es diferente del que aquí se ha seguido.

Para la exposición de este método de cálculo se plantea en la I parte de este trabajo el problema general de la corriente flúida en una máquina rotatoria, indicando los diversos métodos de resolución y las simplificaciones que hay que ir admitiendo hasta llegar a las ecuaciones que utilizan en el proyecto. De esta manera se fundamenta el método, indicando al mismo tiempo otros de mayor alcance, aunque naturalmente más laboriosos, utilizables, por ejemplo, para el proyecto aerodinámico de un compresor diagonal de cualquier clase.

## PRIMERA PARTE

### ECUACIONES GENERALES Y METODOS DE PROYECTO

#### 1. *Notación.*

$V$  = velocidad absoluta.

$W$  = velocidad relativa.

$V_z, V_r, V_\theta$  = componentes axial, radial y tangencial de la velocidad absoluta.

$V_z, W_r, W_\theta$  = íd. íd. íd. de la velocidad relativa.

$\vec{\omega}$  = vector velocidad angular según el eje  $Z$ .

$\vec{r}$  = radio vector.

$a$  = velocidad del sonido.

$\rho$  = densidad

$p$  = presión.

$T$  = temperatura.

$h$  = entalpía másica.

$S$  = entropía.

$\Phi$  = potencial de velocidades.

$\nabla$  = operador «nabla».

$\wedge$  = signo del producto vectorial.

#### 2. *Ecuaciones generales y consecuencias.*

Las ecuaciones del movimiento tridimensional de un fluido ideal, pero compresible, son las siguientes :

Continuidad :

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1)$$

Impulso (en ausencia de fuerzas másicas) :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (2)$$

La expresión de estas ecuaciones en un sistema giratorio con velocidad angular constante  $\vec{\omega}$ , son las siguientes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{W}) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{D\vec{W}}{Dt} - \omega^2 \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{W} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (4)$$

Siendo  $\vec{r}$  el radio vector y  $\vec{W}$  la velocidad relativa, relacionada con la velocidad absoluta  $\vec{V}$  mediante la expresión :

$$\vec{V} = \vec{r} \times \vec{\omega} + \vec{W} \quad (5)$$

En la fórmula (4),  $\frac{D\vec{W}}{Dt}$  es la aceleración relativa,  $-\omega^2 \vec{r}$  la aceleración centrípeta o aceleración de arrastre, y  $2\vec{\omega} \wedge \vec{W}$  la aceleración de Coriolis. Introduciendo en (4) la expresión :

$$\frac{D\vec{W}}{Dt} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\vec{W} \cdot \nabla) \vec{W} = \frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \vec{W}^2 + (\nabla \wedge \vec{W}) \wedge \vec{W} \quad (6)$$

resulta :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} - \omega^2 \vec{r} + \frac{1}{2} \nabla \vec{W}^2 + (\nabla \wedge \vec{W} + 2\vec{\omega}) \wedge \vec{W} = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (7)$$

Teniendo en cuenta que :

$$\text{rot } \vec{r} = \nabla \wedge \vec{r} = \nabla \wedge (\vec{W} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \nabla \wedge \vec{W} + 2\vec{\omega} \quad (8)$$

queda :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\nabla \wedge \vec{r}) \wedge \vec{W} = \omega^2 \vec{r} - \frac{1}{2} \nabla \vec{W}^2 - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (9)$$

Del primer principio de Termodinámica :

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla h - T \nabla S \quad (10)$$

por tanto :

$$\begin{aligned} \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{2} \nabla \vec{W}^2 - \vec{\omega}^2 \vec{r} &= \nabla h - T \nabla S + \frac{1}{2} \nabla \vec{W}^2 - \vec{\omega}^2 \vec{r} = \\ &= \nabla \left( h + \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} U^2 \right) - T \nabla S \end{aligned} \quad (11)$$

Llevando esta expresión a (7) y (9), queda :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\nabla \wedge \vec{W} + 2\vec{\omega}) \wedge \vec{W} = - \nabla \left( h + \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} U^2 \right) + T \nabla S \quad (12)$$

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + (\nabla \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W} = - \nabla \left( h + \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} U^2 \right) + T \nabla S \quad (13)$$

Si el fluido es adiabático, a lo largo de una línea de corriente es  $\nabla S = 0$ . Además, si el movimiento relativo es estacionario, resulta en (12) multiplicando escalarmente por  $\vec{W}$  :

$$\vec{W} \nabla \left( h + \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} U^2 \right) = 0$$

o lo que es lo mismo por ser el movimiento estacionario :

$$-\frac{D}{Dt} \left( h + \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} U^2 \right) = 0 \quad (14)$$

Es decir, que a lo largo de una línea de corriente :

$$h + \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} U^2 = \text{cte.} \quad (15)$$

Si el movimiento absoluto es irrotacional y el movimiento relativo es estacionario, de (13) se deduce que la variación de  $h + \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} U^2$  es proporcional a la variación de entropía, y si el fluido era isentrópico a su llegada a la turbina,  $h + \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} U^2$  será constante en todo el fluido.

En el caso de un estator, es  $\vec{W} = \vec{V}$ ,  $\vec{U} = 0$ , quedando como ecuación del movimiento :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\nabla \wedge \vec{V}) \wedge \vec{V} = - \nabla \left( h + \frac{1}{2} V^2 \right) + T \nabla S = \nabla h_t + T \nabla S \quad (16)$$

De las ecuaciones anteriores se deducen las observaciones siguientes [1] :

Si el fluido entra en el estator con una entalpía total y una entropía constantes y además se considera que el proceso es adiabático, el fluido

será isentrópico y el movimiento irrotacional en todo el estator, siendo también constante la entalpía total.

Si el rotor está alejado del estator, de manera que el movimiento pueda considerarse estacionario a la salida del estator, y si la torsión transmitida a la corriente por el rotor es del tipo torbellino libre, es decir, que el producto de la velocidad tangencial por el radio sea constante, la circulación a lo largo de los álabes fijos es constante, no produciéndose torbellinos a la salida del estator, y pudiéndose considerar estacionario el movimiento relativo en los álabes móviles.

Si los álabes móviles están situados muy próximos a los fijos,  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$  no es constante, desprendiéndose del estator en forma periódica pequeños torbellinos. Este efecto es, en general, despreciable.

Si el estator proporciona a la corriente cualquier otro tipo de torsión, distinta del torbellino libre, se desprenden de su borde de salida torbellinos que penetran en el rotor, siendo la entropía y la entalpía total constantes a la entrada del mismo, pero no  $h + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2}$ , ya que el movimiento relativo en el rotor deja de ser estacionario, no siendo el movimiento absoluto irrotacional.

En las turbinas, en el caso general la corriente no es isentrópica a causa de la distribución de temperaturas a la entrada del estator, crecientes de la base hacia el vértice, con un máximo cerca ya del extremo de los álabes. Este efecto no puede dejar de considerarse, ya que las variaciones de temperatura entre la base de los álabes y su valor máximo pueden llegar a ser superiores al 20%. Por tanto, la entalpía total y  $h + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2}$  no serán constantes en todo el fluido, aunque sí pueden serlo a lo largo de las líneas de corriente.

Si se toman coordenadas cilíndricas  $Z, r, \theta$ , la ecuación vectorial (7) del movimiento se descompone en las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$\frac{\partial W_z}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_z}{\partial r} + \frac{W_\theta}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_r}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{W_\theta}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} + W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{W_\theta^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega W_\theta \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_\theta}{\partial t} + W_r \frac{\partial W_\theta}{\partial r} + \frac{W_\theta}{r} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + W_z \frac{\partial W_\theta}{\partial z} + \frac{W_r W_\theta}{r} + 2\omega W_r = \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (19)$$

Teniendo en cuenta (5) y que  $\vec{r}$  y  $\vec{\omega}$  son perpendiculares, resulta :

$$\begin{aligned} \Gamma_z &= W_z \\ \Gamma_r &= W_r \\ \Gamma_\theta &= W_\theta + \omega r \end{aligned} \quad (20)$$

resultando :

$$W^2 = V_z^2 + V_r^2 + \Gamma_\theta^2 - 2\omega r V_\theta + \omega^2 r^2 = V^2 - 2\omega r V_\theta + \omega^2 r^2$$

Por tanto, en el caso de movimiento relativo estacionario, la condición (15) se expresa :

$$h + \frac{1}{2} V^2 - \omega r V_\theta = \text{cte.} \quad (21)$$

que es la denominada ecuación de Euler de las máquinas rotatorias.

La resolución del problema tridimensional mediante el sistema de ecuaciones (17), (18) y (19) (junto con la ecuación de continuidad y las condiciones de contorno) es en extremo difícil. En el caso de movimiento isentrópico e irrotacional, en la referencia [1] se obtiene la ecuación diferencial del potencial de velocidades :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{W_r^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{W_\theta^2}{a^2}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \left(1 - \frac{W_z^2}{a^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2 \frac{W_r W_\theta}{a^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \\ - 2 \frac{W_\theta W_z}{a^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial z} - 2 \frac{W_z W_r}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{W_\theta^2}{a^2}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

siendo :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial z} &= V_z = W_z \\ \frac{\partial \phi}{\partial r} &= V_r = W_r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} &= V_\theta = W_\theta + \omega r \end{aligned} \quad (23)$$

La principal dificultad para la resolución de la ecuación (22) consiste en que su linearización no resulta en general posible, ya que la velocidad varía considerablemente de unos puntos a otros de los álabes, pasando en algunos casos la corriente de subsónica a supersónica. Además el problema de contorno es de segundo orden, de resolución más laboriosa, al tenerse que utilizar el potencial de velocidades en vez de la función de corriente. Por otra parte, la condición de fluido isentrópico rara vez se cumple en una turbina de gas.



Se hace, pues, necesario recurrir a soluciones bidimensionales del problema, siendo una de las hipótesis que con frecuencia se utiliza el admitir que la corriente tiene simetría axial.

### 3.—Caso de simetría axial.

Si se considera movimiento estacionario y se admite la hipótesis de simetría axial  $\left(\frac{\partial}{\partial \theta}=0\right)$  las ecuaciones (17), (18) y (19) quedan :

$$W_r \frac{\partial W_z}{\partial r} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (24)$$

$$W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{W_\theta^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega W_\theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (25)$$

$$W_r \frac{\partial W_\theta}{\partial z} + W_z \frac{\partial W_\theta}{\partial r} + \frac{W_r W_\theta}{r} + 2\omega W_r = 0 \quad (26)$$

Expresando la ecuación (26) en ejes absolutos, resulta :

$$V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + V_z \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_r V_\theta}{r} = 0 \quad (27)$$

Al ser el movimiento estacionario y con simetría axial, los dos primeros términos son la derivada sustancial de  $V$ , quedando :

$$\frac{DV_\theta}{Dt} + \frac{V_r V_\theta}{r} = 0 \quad (28)$$

o lo que es lo mismo :

$$\frac{D(V_\theta r)}{rDt} = 0 \quad (29)$$

de la que se deduce :

$$rV_\theta = \text{cte. (a lo largo de una línea de corriente)} \quad (30)$$

De (30) y (21) se obtiene :

$$h + \frac{V^2}{2} = h_t = \text{cte.} \quad (31)$$

no tomándose energía alguna de la corriente. Por tanto, la hipótesis de simetría axial, utilizando el sistema (24), (23) y (26), es incompatible con la solución del problema.

Esta dificultad puede soslayarse utilizando el método de Lorentz [3], el cual plantea las ecuaciones en el caso de simetría axial considerando infinito número de álabes, infinitamente próximos, e introduciendo las pre-

siones ejercidas por los álabes sobre la unidad de masa del fluido. Si  $q_z$ ,  $q_\theta$  y  $q_r$  son las componentes de dichas presiones según las direcciones axial, tangencial y radial, se obtienen las ecuaciones siguientes (movimiento estacionario):

$$W_r \frac{\partial W_z}{\partial r} + W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} - q_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (32)$$

$$W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{W_\theta^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega W_\theta - q_r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (33)$$

$$W_r \frac{\partial W_\theta}{\partial r} + W_z \frac{\partial W_\theta}{\partial z} + \frac{W_r W_\theta}{r} + 2\omega W_r - q_\theta = 0 \quad (34)$$

Estas ecuaciones se completan con las condiciones de Bauersfeld [3], que expresan que las  $q_z$ ,  $q_r$  y  $q_\theta$  son las componentes de las presiones normales a la superficie de los álabes.

Este método de Lorentz ha sido seguido por J. T. Hamrick [4] y colaboradores para el estudio de la corriente en compresores diagonales utilizando métodos de aproximaciones sucesivas, resultando el procedimiento en extremo laborioso.

Para el estudio de la corriente en un compresor o turbina axiales, y aun en ciertos tipos de compresores diagonales, pueden llevarse más adelante las aproximaciones, utilizando para ello datos y experiencias de otros compresores o turbinas y de estudios de álabes en cascada, a fin de obtener métodos de proyecto flexibles y que puedan resolverse en un tiempo razonable.

#### 4. Métodos de proyecto.

En el estudio de las máquinas rotatorias, o simplemente en el de una hilera de álabes, se presentan dos casos que han sido denominados el problema directo y el problema inverso.

En el primer problema se conocen el estado del fluido antes de la máquina, el régimen, la geometría de los álabes y de las paredes de la máquina; debiendo determinarse el campo tridimensional de velocidades, el estado del fluido en cualquier punto y la potencia de la máquina.

En el segundo problema se conocen el estado del fluido antes de la turbina o compresor, el régimen y la potencia; debiendo determinarse la forma de los álabes y geometría general de la máquina, el campo tridimensional de velocidades y el estado del fluido en cualquier punto.

El primer problema corresponde al caso del cálculo de actuaciones de la máquina fuera del punto de diseño, mientras que el segundo problema es el que se presenta en el proyecto de la misma.

La resolución de estos problemas mediante el empleo de las ecuaciones tridimensionales completas o linealizadas, combinaciones de soluciones bi-

dimensionales o aun con las ecuaciones de Lorentz, conducen a métodos numéricos, tales como el método de Southwell, en extremo laboriosos, que implican semanas o meses para su resolución. Este inconveniente se agrava con la falta de flexibilidad de estos métodos, entendiéndose por falta de flexibilidad el que con ellos no puede saberse «a priori» qué forma van a tener los álabes en el caso del problema de proyecto o problema inverso, y aun tampoco puede predecirse si los álabes han de tener buenas o malas características en el caso del problema directo.

Por estas razones estos métodos, aunque de gran interés con fines de investigación, no son aconsejables en una oficina de proyectos, que únicamente deberá hacer uso de ellos cuando no sea admisible recurrir a ulteriores simplificaciones, como en el caso de algunos tipos de compresores diagonales.

Todo método de proyecto ha de poderse llevar a cabo en un tiempo razonable, y sobre todo ha de ser flexible, permitiendo conocer en cada caso cómo la alteración de cualquier variable ha de afectar a los resultados. Por tanto, ha de utilizar los conocimientos generales que se obtienen en los ensayos de álabes en cascada y beneficiarse de experiencias previas de otros proyectos, con las reglas y fórmulas de tipo empírico que éstos han permitido establecer.

##### 5. *Método de las líneas de corriente.*

El método de las líneas de corriente, que a continuación se va a exponer, es el que casi exclusivamente se utiliza, más o menos simplificado, para el cálculo de toda clase de compresores y turbinas axiales, siendo aplicable también a compresores diagonales de álabes radiales. Se analiza aquí en general a fin de poder posteriormente deducir de él los cálculos de cada caso particular.

##### 6. *Hipótesis.*

- a) Fluido ideal, compresible.
- b) Se admite que el movimiento es estacionario en ejes relativos, despreciando la influencia de los torbellinos, o admitiendo que la perturbación por ellos producida es periódica, en el caso de que la torsión de la corriente no sea del tipo torbellino libre.
- c) Se admite la hipótesis de simetría axial.
- d) Se supone que los álabes son radiales o casi radiales.

La idea básica del método consiste en renunciar al estudio de la corriente en el interior de los álabes. Con las hipótesis anteriores es posible relacionar directamente el estado y velocidades del fluido entre dos secciones anterior y posterior a los álabes. La influencia de estos álabes se traduce en proporcionar una deflexión a la corriente, cuyo valor viene fijado por la dirección media de la velocidad de salida. Esta dirección de la velocidad de salida se calcula mediante reglas semiempíricas (fórmula del

coseno en el caso de las turbinas, fórmulas de Howell y Constant para compresores axiales, etc., suponiendo que es independiente, como en la práctica con gran aproximación acontece, del ángulo de incidencia.

## 7. Ecuaciones.

1.º) *Ecuaciones del movimiento.*—Al admitir la hipótesis de simetría axial pueden utilizarse las ecuaciones de Lorentz. Al admitirse que los álabes son radiales o casi radiales, es  $q_r=0$ . Por tanto, la ecuación (33) expresada en ejes absolutos resulta :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{V_\theta^2}{r} - V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} - V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (35)$$

las otras dos ecuaciones de Lorentz no se utilizan, sustituyéndose por :

- a) La ecuación de la energía (21), aplicable de acuerdo con la hipótesis b), y que es consecuencia de las ecuaciones del movimiento, es decir :

$$h + \frac{1}{2} V^2 - \omega r V_\theta = \text{cte.} \quad (36)$$

- b) Por una ecuación que expresa que la dirección de la componente cilíndrica (resultante de  $V_\theta$  y  $V_z$ ) de la velocidad de salida, es una función conocida del radio, es decir :

$$\alpha = f(r) \quad \text{o} \quad \frac{V_\theta}{V_z} = f(r) \quad (37)$$

En el caso del problema directo la ecuación anterior proporciona el ángulo de salida en función de la disposición geométrica de los álabes. En el caso del problema inverso se fija un tipo de torsión de los álabes y una distribución radial de la energía tomada a la corriente (generalmente constante con el radio), deduciéndose la forma de los álabes a partir de dicha ecuación.

2.º) *Ecuación de continuidad.*—En forma diferencial, aplicada a una superficie de corriente entre dos secciones, una anterior y otra posterior, a los álabes, se escribe :

$$\rho_1 V_{z1} r_1 dr_1 = \rho_2 V_{z2} r_2 dr_2 \quad (38)$$

o bien su expresión integrada :

$$2\pi \int_{r_{2i}}^{r_{2e}} \rho_2 V_{z2} r_2 dr_2 = G \quad (39)$$

en la que  $G$  es el gasto en peso y  $r_{2i}$  y  $r_{2e}$  son los radios interior y exterior en la sección 2.

3.º *Ecuaciones del movimiento isentrópico a lo largo de las líneas de corriente.*—En una misma superficie de corriente, entre las secciones 1 y 2, se verifica :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma-1} \quad (40)$$

A veces, estas ecuaciones se sustituyen por las que resultan de suponer una transformación politrópica en vez de considerar la transformación isentrópica, resultando :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{n-1} \quad (41)$$

en la que el exponente  $n$  puede obtenerse a partir de los valores medios estimados para las pérdidas o para el rendimiento adiabático de la turbina.

La utilización de las ecuaciones anteriores, junto con datos y experiencias de álabes en cascada y del diseño y actuaciones de otros compresores o turbinas, es en lo que está basado el método de cálculo que se desarrolla en la segunda parte de este trabajo.

## SEGUNDA PARTE

### METODO DE CALCULO Y APLICACIONES

#### 1. *Introducción.*

Una vez expuestos en la primera parte de este trabajo los fundamentos en que se basa el cálculo aerodinámico de máquinas rotatorias, y las simplificaciones que se admiten hasta llegar a un método práctico de proyecto o de cálculo de actuaciones, se desarrolla en esta segunda parte el citado método de cálculo.

Como ya se ha indicado, el método es aplicable a compresores diagonales de álabes radiales o casi-radiales y para cualquier clase de turbinas y compresores axiales.

Se expondrá primeramente en general el método, para después hacer aplicación a los diversos tipos de máquinas rotatorias, dedicándose especial atención a los compresores y turbinas axiales.

Los cálculos se limitarán a la parte fundamental de los mismos, es decir, al estudio de cómo se relacionan las magnitudes que caracterizan la corriente flúida, presión, densidad y velocidades, entre las secciones de entrada y salida de una máquina rotatoria o hilera de álabes; así como a la determinación de estas magnitudes en la sección de salida en función de sus valores en la sección de entrada y de la disposición geométrica de la máquina.

#### 2. *Notación.*

$p$  = presión.

$\rho$  = densidad.

$T$  = temperatura.

$V$  = velocidad absoluta.

$W$  = velocidad relativa.

$\omega$  = velocidad angular.

$r$  = radio.

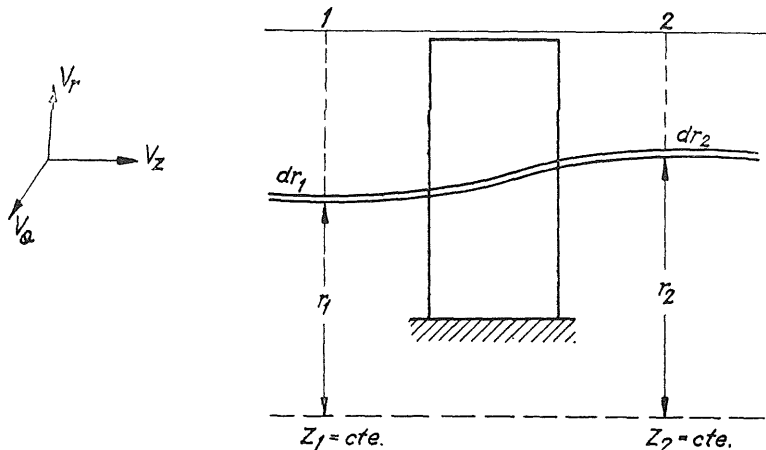
$\gamma$  = exponente de la transformación isentrópica.

$\Delta$  = pendiente de las líneas de corriente.

$F, \xi, \zeta, k$  = funciones.

$\bar{c}, \bar{p}, \bar{v}$ , etc. = valores medios en las secciones 1 ó 2.

Subíndices :



$z$  = axial.

$r$  = radial.

$\theta$  = tangencial.

$m$  = valor medio entre 1 y 2.

$i$  = interior.

$e$  = exterior.

### 3. Hipótesis y ecuaciones generales.

De acuerdo con lo expuesto en la primera parte de este trabajo, el estudio de la corriente en una máquina rotatoria, compresor o turbina, ha de efectuarse con las ecuaciones de los flúidos ideales, no considerando los efectos de la fricción más que como una corrección a los resultados obtenidos con las citadas ecuaciones de los flúidos ideales.

Por otra parte, también se indicó que todo método práctico de proyecto ha de basarse en la hipótesis de simetría axial, renunciándose a estudiar la corriente en el interior de los álabes y relacionándose las variables que caracterizan el estado de la corriente flúida entre las secciones de entrada y salida de los mismos.

Admitiendo también que el movimiento es estacionario en ejes relativos, y que es despreciable la componente radial de las fuerzas ejercidas

por la presión de la corriente sobre los álabes, resultan las ecuaciones fundamentales siguientes :

a) Ecuación del impulso integrada sobre una línea de corriente :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} (V_{z1}^2 + V_{\theta1}^2 + V_{r1}^2 - 2\omega r_1 V_{\theta1}) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} (V_{z2}^2 + V_{\theta2}^2 + V_{r2}^2 - 2\omega r_2 V_{\theta2}) \quad (1)$$

b) Ecuación del impulso en sentido radial :

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial r_i} = \frac{V_{\theta i}^2}{r_i} - V_{ri} \frac{\partial V_{ri}}{\partial r_i} - V_{zi} \frac{\partial V_{ri}}{\partial z_i} \quad (i=1, 2) \quad (2)$$

c) Ecuación de continuidad :

$$V_{z1} \rho_1 r_1 dr_1 = V_{z2} \rho_2 r_2 dr_2 \quad (3)$$

d) Movimiento isentrópico (sobre cada línea de corriente) :

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \quad (4)$$

Además de estas cuatro ecuaciones existe otra más : en el problema directo la relación que expresa que el ángulo de salida  $\alpha_2$  es una función conocida del radio, relación que puede expresarse en la forma :

$$\frac{r_2 \omega_2 - V_{\theta2}}{V_{z2}} = \xi(r_2) \quad (5)$$

y en el caso del problema inverso, o problema de diseño, la ecuación de la distribución que se imponga de presiones o temperaturas totales a la salida de los álabes móviles, es decir :

$$r_1 V_{\theta1} - r_2 V_{\theta2} = \zeta(r_2) \quad (6)$$

El estado del fluido en la sección 1 se conoce, tanto en el problema directo como en el inverso, disponiéndose de cinco ecuaciones para la determinación de las cinco incógnitas  $V_{z2}$ ,  $V_{\theta2}$ ,  $V_{r2}$ ,  $p_2$  y  $\rho_2$ , junto con las condiciones de contorno para la determinación de las constantes de integración, condiciones que se introducirán más adelante.

#### 4. Resolución general del sistema de ecuaciones.

Sea :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} (V_{z1}^2 + V_{\theta1}^2 + V_{r1}^2 - 2\omega r_1 V_{\theta1}) = F(r_1) \quad (7)$$

en la que  $F(r_1)$  es una función conocida de  $r_1$ .



Tenemos, pues :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} (V_{z_2}^2 + V_{\theta_2}^2 + V_{r_2}^2 - 2\omega r_2 V_{\theta_2}) = F(r_1) \quad (8)$$

Diferenciando respecto a  $r_1$  y  $r_2$ , resulta :

$$\left[ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_2} (V_{z_2}^2 + V_{\theta_2}^2 + V_{r_2}^2 - 2\omega r_2 V_{\theta_2}) \right] dr_2 = \frac{\partial}{\partial r_1} F(r_1) dr_1 \quad (9)$$

Ahora bien :

$$\frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \right) = \frac{1}{\rho_2^\gamma} \frac{\partial p_2}{\partial r_2} - \frac{\gamma p_2}{\rho_2^{\gamma+1}} \frac{\partial \rho_2}{\partial r_2} = \frac{1}{\rho_2^\gamma} \frac{\partial p_2}{\partial r_2} - \frac{1}{\rho_2^{\gamma-1}} \frac{\gamma p_2}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial r_2} \quad (10)$$

de la que se obtiene :

$$\frac{\gamma p_2}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial r_2} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial r_2} - \rho_2^{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \right) \quad (11)$$

o bien :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial r_2} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial r_2} - \frac{\rho_2^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \right) \quad (12)$$

Sustituyendo este valor en :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial r_2} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2^2} \left( \frac{\partial p_2}{\partial r_2} \right) \quad (13)$$

resulta :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial r_2} + \frac{\rho_2^{\gamma-1}}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2} \right) \quad (14)$$

y con (4) :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial r_2} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \frac{1}{\frac{p_1}{\rho_1^\gamma}} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \right) \quad (15)$$

y también :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial r_2} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial r_2} \log \left( \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \right) \quad (16)$$

por último :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial r_2} + \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial r_1} \log \left( \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \right) \frac{dr_1}{dr_2} \quad (17)$$

Sustituyendo en (8), resulta :

$$\left[ \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial r_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r_2} (V_{z2}^2 + V_{\theta 2}^2 + V_{r2}^2 - 2\omega r_2 V_{\theta 2}) \right] \frac{dr_2}{dr_1} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\phi_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial r_1} \log \left( \frac{\phi_1}{\rho_1^\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial r_1} F(r_1) \quad (18)$$

Introduciendo el valor de  $\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial r_2}$  dado por (2) ( $i=2$ ), y simplificando, queda :

$$\left[ \frac{V_{\theta 2}^2}{r_2} + \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{V_{\theta 2}^2}{2} - \omega r_2 V_{\theta 2} \right) - V_{z2} \frac{\partial V_{r2}}{\partial z_2} + V_{z2} \frac{\partial V_{z2}}{\partial r_2} \right] \frac{dr_2}{dr_1} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\phi_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial r_1} \log \left( \frac{\phi_1}{\rho_1^\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial r_1} F(r_1) \quad (19)$$

Ahora bien :

$$\frac{dr_2}{dr_1} = \frac{V_{z1} \rho_1 r_1}{V_{z2} \rho_2 r_2} \quad (20)$$

y con

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \rho_1 \frac{\left( \frac{\phi_2}{\rho_2^\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho_1 \left( \frac{\phi_1}{\rho_1^\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\left( \frac{\phi_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left( \frac{\phi_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left( \frac{\phi_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} = \frac{\rho_1 k_1^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\left( \frac{\phi_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad (21)$$

habiendo denominado :

$$k_1 = \frac{\phi_1}{\rho_1^\gamma} \quad (22)$$

Introduciendo (20) y (21) en (19), queda :

$$\left[ \frac{V_{\theta 2}^2}{r_2} - \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{V_{\theta 2}^2}{2} - \omega r_2 V_{\theta 2} \right) - V_{z2} \frac{\partial V_{r2}}{\partial z_2} + V_{z2} \frac{\partial V_{z2}}{\partial r_2} \right] \frac{V_{z1} r_1}{V_{z2} r_2} \times \frac{1}{\left( \frac{\phi_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\phi_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial r_1} \log k_1 = \frac{\partial}{\partial r_1} F(r_1) \quad (23)$$

Esta ecuación junto con :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\dot{p}_2}{\rho_2} = F(r_1) - \frac{1}{2} (V_{z2}^2 + V_{\theta2}^2 + V_{r2}^2 - 2\omega r_2 V_{\theta2}) \quad (24)$$

y con las ecuaciones (5) o (6), constituyen un sistema en el que las incógnitas son las componentes de la velocidad,  $V_{z2}$ ,  $V_{\theta2}$ ,  $V_{r2}$ ;  $\frac{\dot{p}_2}{\rho_2}$  y  $r_2$  como función de  $r_1$ .

Primeramente se tratará de la solución en líneas generales de este sistema, para después concretar en cada caso particular.

En el problema directo se conoce la disposición geométrica de la máquina, y en el problema inverso las dimensiones generales de la misma, que se obtienen en primera aproximación mediante las ecuaciones de la teoría unidimensional.

En ambos casos se comienza por un trazado previo aproximado de las líneas de corriente en el plano meridiano (intersección de las superficies de corriente con un plano que pase por el eje de la máquina).

El criterio a seguir en este primer trazado es el de que las superficies de corriente dividan el espacio anular entre los álabes en superficies de igual área; siendo en general suficiente que se dibujen de 5 a 7 secciones además de las superficies exterior e interior, que ya de por sí son líneas de corriente.

Una vez trazadas las líneas de corriente queda establecida la función  $r_2 = f(r_1)$ . Además, si  $\Lambda$  es la pendiente de las líneas de corriente, tenemos :

$$V_{r2} = \Lambda_2 V_{z2} \quad (25)$$

y

$$\frac{\partial V_{r2}}{\partial z_2} = \Lambda_2 \frac{\partial V_{z2}}{\partial z_2} + V_{z2} \frac{\partial \Lambda_2}{\partial z_2} \quad (26)$$

obteniéndose así  $\partial V_{r2}/\partial z_2$  en función de la pendiente y curvatura de las líneas de corriente y en función de  $\partial V_{z2}/\partial z_2$ . Para esta última derivada puede tomarse un valor aproximado, ya que en la expresión

$$\frac{V_{\theta2}^2}{r^2} - \frac{\partial}{\partial r_2} (V_{\theta2}^2 - \omega r_2 V_{\theta2}) - V_{z2} \frac{\partial V_{r2}}{\partial z_2} + V_{z2} \frac{\partial V_{z2}}{\partial r_2}$$

predominan fundamentalmente los dos primeros términos. Por otra parte, las velocidades axiales varían poco entre las secciones de entrada y salida, y además, esta variación suele ser gradual. Por tanto, en la mayoría de los casos es suficiente que se tome :

$$\frac{\partial V_{z2}}{\partial z_2} \approx \frac{V_{z1} - V_{z2}}{z_1 - z_2} \quad (27)$$

en la que  $z_1 - z_2$  tiene un valor constante.

Esta aproximación, generalmente suficiente en la práctica, simplifica grandemente el problema, ya que al no quedar entonces más que derivadas respecto a  $r_2$ , pueden tratarse las ecuaciones diferenciales resultantes como ecuaciones diferenciales ordinarias en vez de como ecuaciones en derivadas parciales.

Introduciendo los valores (25), (26) y (27), en (23) y (24), y eliminando  $V_{\theta 2}$  y  $\partial V_{\theta 2}/\partial r_2$  mediante (5) o (6) queda un sistema formado por una única ecuación diferencial y una ecuación ordinaria en  $\frac{p_2}{\rho_2}$ ,  $V_{z2}$  y  $\frac{\partial V_{z2}}{\partial r_2}$ , pudiendo también eliminarse  $\frac{p_2}{\rho_2}$  mediante (24) a fin de obtener una única ecuación diferencial. Este sistema, o bien la ecuación, pueden resolverse por iteración o por cualquier otro método numérico.

La constante de integración de la ecuación diferencial se obtiene con la condición :

$$G = 2\pi \int_{r_{12}}^{r_{e2}} \rho_2 V_{z2} r_2 dr_2 \quad (28)$$

Una vez obtenida la función  $V_{z2}=f(r_2)$ , las demás variables se obtienen de un modo inmediato.

Una vez efectuado este primer tanteo, se corrigen en segunda aproximación las líneas de corriente valiéndose de la condición

$$\int_{r_{12}}^{r_2} \rho_2 V_{z2} r_2 dr_2 = \int_{r_{11}}^{r_1} \rho_1 V_{z1} r_1 dr_1 \quad (29)$$

que proporciona  $r_2$  en función de  $r_1$ , permitiendo un nuevo trazado de las líneas de corriente y con él una segunda aproximación de los resultados, no siendo en general necesario seguir con nuevas aproximaciones.

El método general que acaba de exponerse correspondería, por ejemplo, al caso de una turbina con gran divergencia en sus paredes y con temperaturas variables en la entrada de su estator. Así en general, la resolución del problema es bastante larga, pero pueden introducirse numerosas simplificaciones en los diferentes casos particulares que se consideren.

## 5. Compresores diagonales.

En la mayoría de los casos puede admitirse en los compresores diagonales que la corriente es isentrópica. En estas condiciones, al ser

$$\frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial r_1} \left( \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \right) = 0,$$

la ecuación (20) se reduce a la expresión :

$$\begin{aligned} \frac{V_{\theta 2}^2}{r_2} - \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{V_{\theta 2}}{2} - \omega r_2 V_{\theta 2} \right) - V_{z2} \frac{\partial V_{r2}}{\partial z_2} + V_{z2} \frac{\partial V_{z2}}{\partial r_2} \frac{V_{z1} r_1}{V_{z2} r_2} = \\ = \frac{\left( \frac{\dot{p}_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\rho_1 k_1^{\frac{1}{\gamma-1}}} \frac{\partial}{\partial r_1} F(r_1) \end{aligned} \quad (30)$$

En el caso más frecuente, los compresores diagonales se diseñan de manera que el incremento de temperatura total sea constante en todas las líneas de corriente, es decir :

$$r_1 V_{\theta 1} - r_2 V_{\theta 2} = \text{cte.} \quad (31)$$

y al ser :

$$c_p T_{1t} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\dot{p}_1}{\rho_2} + \frac{V_1^2}{2} = \text{cte.} \quad (32)$$

la ecuación (30) se reduce a la expresión

$$\frac{V_{\theta 2}^2}{r_2} + V_{z2} \frac{\partial V_{\theta 2}}{\partial r_2} + V_{\theta 2} \frac{\partial V_{z2}}{\partial r_2} - V_{z2} \frac{\partial V_{r2}}{\partial z_2} = 0 \quad (33)$$

cuya resolución, aunque también exige el trazado previo de las líneas de corriente para estimar la derivada de la velocidad radial, es mucho más sencilla que en el caso general.

## 6. Máquinas axiales.

En el caso de máquinas axiales, compresores o turbinas, de forma más o menos cilíndrica, la desviación radial de las líneas de corriente es pequeña, lo que permite una importante simplificación de las ecuaciones.

En secciones situadas lejos de los álabes las velocidades radiales y sus derivadas se anulan, pero sin mucho error puede admitirse que lo mismo acontece en las proximidades de los álabes, es decir, en las secciones 1 y 2 de referencia. Por tanto :

$$V_{r1} = V_{r2} = \frac{\partial V_{r1}}{\partial r_1} = \frac{\partial V_{r2}}{\partial r_2} = 0 \quad (34)$$

Así, pues, las ecuaciones (1) y (2) quedan en la forma

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\dot{p}_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} (V_{z1}^2 + V_{\theta 1}^2 - 2\omega r_1 V_{\theta 1}) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\dot{p}_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} (V_{z2}^2 + V_{\theta 2}^2 - 2\omega r_2 V_{\theta 2}) \quad (35)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial r_1} = \frac{V_{\theta 1}^2}{r_1} \quad (36) \quad \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial r_2} = \frac{V_{\theta 2}^2}{r_2} \quad (37)$$

y la ecuación (23) :

$$\left[ \frac{V_{\theta 2}^2}{r_2} + \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{V_{\theta 2}^2}{2} - \omega r_2 V_{\theta 2} \right) + V_{z 2} \frac{\partial V_{z 2}}{\partial r_2} \right] \frac{V_{z 1} r_1}{V_{z 2} r_2} \frac{\rho_1 k_1}{\left( \frac{p_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} +$$

$$+ \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial r_1} \log k_1 = \frac{\partial}{\partial r_1} F(r_1) \quad (38)$$

siendo en este caso :

$$F(r_1) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} (V_{z 1}^2 + V_{\theta 1}^2 - 2\omega r_1 V_{\theta 1}) \quad (39)$$

En este tipo de máquinas también se verifica :

$$r_1 \approx r_2 \quad (40)$$

No obstante, no es correcto tomar directamente en (35) y en la ecuación de continuidad (3)  $r_1 = r_2$  y  $dr_1 = dr_2$ , con lo que esta última ecuación proporcionaría :

$$V_{z 1} \rho_1 = V_{z 2} \rho_2 \quad (40)$$

ya que la práctica enseña que si bien es  $r_1 \approx r_2$ , por el contrario  $dr_1$  y  $dr_2$  pueden diferir en gran proporción, siendo posible que se cometan errores de importancia al admitir esta última hipótesis y, por tanto, la relación (40).

Utilizando la fórmula (40) los cálculos se simplifican considerablemente, siendo en esta forma como se trata elementalmente el cálculo aerodinámico de compresores y turbinas axiales.

La forma correcta de proceder consiste en tomar  $r_1 = r_2$ , pero *no*  $dr_1 = dr_2$ . Para ello, una vez efectuada la derivación y sustituido el valor de  $dr_1/dr_2$  mediante la ecuación (3) de continuidad hasta llegar a la ecuación (38), se toma en ella  $r_1 = r_2 = r$ , quedando :

$$\left[ \frac{V_{\theta 2}^2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_{\theta 2}^2}{2} - \omega r V_{\theta 2} \right) + V_{z 2} \frac{\partial V_{z 2}}{\partial r} \right] \frac{V_{z 1}}{V_{z 2}} \frac{\rho_1 k_1}{\left( \frac{p_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} +$$

$$+ \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial r} \log k_1 = \frac{\partial}{\partial r} F(r_1)_{r_1=r} \quad (41)$$

La ecuación de continuidad en la forma (3) deja ya de utilizarse, empleándose su forma integrada :

$$G = 2\pi \int_{r_1}^{r_e} V_{z2} \rho_2 r dr \quad (42)$$

Si los radios interior y exterior de los álabes en las secciones 1 y 2 difieren ligeramente, como suele acontecer en la práctica, puede tomarse en (41) un valor intermedio.

La anterior simplificación tiene un carácter fundamental, ya que con ella pueden efectuarse todos los cálculos sin necesidad de dibujar previamente las líneas de corriente. No obstante, una vez efectuados los cálculos puede determinarse la forma aproximada de las líneas de corriente utilizando la relación (29).

## 7. Compresores axiales.

Para el cálculo de una hilera de álabes en un compresor axial puede, generalmente, admitirse que la corriente es isentrópica. Por tanto, la ecuación (41) se reduce a la expresión :

$$\left[ \frac{V_{\theta 2}^2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_{\theta 2}^2}{2} - \omega r V_{\theta 2} \right) + V_{z2} \frac{\partial V_{z2}}{\partial r} \right] \frac{V_{z1}}{V_{z2}} = \frac{\left( \frac{p_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\rho_1 k^{\frac{1}{\gamma-1}}} \frac{\partial}{\partial r} F(r_1) \quad (43)$$

$r_1 = r$

siendo

$$k = \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cte. en todo el fluido} \quad (44)$$

En el caso de un compresor axial de tipo transónico no pueden llevarse más adelante las simplificaciones. Por el contrario, para el cálculo de un escalón de un compresor subsónico ( $M \leq 0,8$ ), puede tomarse sin gran error una densidad media constante en el escalón. Esto es posible porque se renuncia a estudiar la corriente en las proximidades y en el interior de los álabes, relacionándose únicamente las magnitudes que caracterizan el estado del fluido entre las secciones de entrada y salida.

En este caso, la simplificación es tan importante que puede llegarse a la integración directa de la ecuación (43).

En efecto, con la hipótesis de fluido incompresible la ecuación (43) se

reduce a la siguiente :

$$\left[ \frac{V_{\theta 2}^2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_{\theta 2}^2}{2} - \omega r V_{\theta 2} \right) + V_{z 2} \frac{\partial V_{z 2}}{\partial r} \right] \frac{V_{z 1}}{V_{z 2}} = \frac{\partial}{\partial r} F(r_1) \quad (45)$$

$r_1 = r$

En el caso del problema directo, sustituyendo el valor de  $V_{\theta 2}$  dado por la expresión :

$$\frac{r \omega V_{\theta 2}}{V_{z 2}} = \tan \alpha_2 = \xi(r)$$

y escribiendo explícitamente  $F(r_1)$ , resulta :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} (\tan \alpha_2 \log r) \tan^2 \alpha_2 V_{z 2} - 2 \omega \tan \alpha_2 + \frac{1}{\cos^2 \alpha_2} \frac{d V_{z 2}}{dr} = \\ = \frac{1}{V_{z 1}} \left[ \frac{V_{\theta 1}^2}{r} + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} (V_{z 1}^2 + V_{\theta 1}^2 - 2 \omega r V_{\theta 1}) \right] \end{aligned} \quad (46)$$

o bien :

$$\begin{aligned} \frac{d V_{z 2}}{dr} + \frac{d}{dr} (\tan \alpha_2 \log r) \sin^2 \alpha_2 V_{z 2} - \frac{\cos^2 \alpha_2}{V_{z 1}} \left[ \frac{V_{\theta 1}^2}{r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} (V_{z 1}^2 + V_{\theta 1}^2 - 2 \omega r V_{\theta 1}) \right] - 2 \omega \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma :

$$\frac{d V_{z 2}}{dr} + p(r) V_{z 2} + q(r) = 0 \quad (48)$$

cuya solución general es :

$$V_{z 2} = e^{-\int_{r_1}^r p(r) dr} \left[ C - \int_{r_1}^r q(r) e^{\int_{r_1}^r p(r) dr} dr \right] \quad (49)$$

determinándose la constante de integración mediante la ecuación de continuidad :

$$G = 2 \pi \rho_m \int_{r_1}^{r_2} V_{z 2} r dr \quad (50)$$

En el caso del problema inverso, suponiendo como condición de diseño la constancia de las presiones totales en las secciones 1 y 2, o lo que es



lo mismo :

$$p_{1t} = \text{cte.} \quad , \quad r_1 V_{\theta 1} - r_2 V_{\theta 2} = \text{cte.} \quad (51)$$

queda simplemente como ecuación (44) :

$$\frac{V_{\theta 2}^2}{r} + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} (V_{z 2}^2 + V_{\theta 2}^2) = 0 \quad (52)$$

que se integra una vez prefijado el tipo de torsión, es decir, la variación deseada de la velocidad tangencial en función del radio.

La densidad media  $\rho_m$  se determina previamente aplicando la teoría unidimensional, incluyendo pérdidas friccionales, de los flúidos compresibles al escalón del compresor con objeto de determinar el valor medio  $\bar{\rho}_2$  de la densidad en la sección 2. A continuación se toma simplemente :

$$\rho_m = \frac{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2}{2} \quad (53)$$

#### 8. Turbinas axiales.

En el caso de una turbina de un motor de reacción la corriente en general no es isentrópica, ya que suelen diseñarse las cámaras de combustión de manera que produzcan una distribución radial de temperaturas de manera que produzcan una distribución radial de temperaturas creciente de la base hacia el vértice de los álabes (\*), con objeto de que la zona que soporta mayores esfuerzos—la base—esté sometida a menores temperaturas. La diferencia entre los valores máximo y mínimo de esta distribución de temperaturas puede llegar a ser del orden del 20%, por lo cual no puede dejar de considerarse el carácter no isentrópico de la corriente flúida.

#### 9. Problema directo.

En el caso del problema directo las ecuaciones de que se dispone son las siguientes :

$$\left[ \frac{V_{\theta 2}^2}{r} + V_{\theta 2} \frac{\partial V_{\theta 2}}{\partial r} - \omega r \frac{\partial V_{\theta 2}}{\partial r} - \omega V_{\theta 2} + V_{z 2} \frac{\partial V_{z 2}}{\partial r} \right] \frac{V_{z 1}}{V_{z 2}} \frac{\rho_1 k_1}{\left( \frac{p_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} +$$

$$+ \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial r} \log k_1 = \frac{\partial}{\partial r} F(r) \quad (54)$$

(\*) Generalmente el máximo de la curva de temperaturas no se produce en el vértice de los álabes, sino en una zona situada en las proximidades del 70% de la altura de los mismos.

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_{z2}^2}{2} + \frac{V_{\theta2}^2}{2} - \omega r V_{\theta2} = F(r) \quad (55)$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{r\omega - V_{\theta2}}{V_{z2}} = \xi(r) \quad (56)$$

Sustituyendo el valor de  $V_{\theta2}$  y el de  $\frac{\partial V_{\theta2}}{\partial r}$  obtenidos de (56) en (54) resulta :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} [\log(r \tan \alpha_2)] \tan^2 \alpha_2 V_{z2} - 2\omega \tan \alpha_2 + \frac{1}{\cos^2 \alpha_2} \frac{dV_{z2}}{dr} = \\ & = \frac{1}{V_{z1}} \frac{\left(\frac{p_2}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\rho_1 k_1^{\frac{1}{\gamma-1}}} \left[ \frac{d}{dr} F(r) - \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \frac{d}{dr} \log k_1 \right] \end{aligned} \quad (57)$$

Si el segundo miembro de esta ecuación no dependiese de  $V_{z2}$  resultaría una ecuación diferencial lineal de primer orden, cuya integral es de la forma (49). Por tanto, puede obtenerse fácilmente la solución de la ecuación (57) mediante iteración. Para ello basta tomar inicialmente un valor medio del término :

$$\frac{\left(\frac{p_2}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}{\rho_1 k_1^{\frac{1}{\gamma-1}}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (57)$$

que puede obtenerse mediante la teoría unidimensional, tomando también inicialmente :

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} \frac{d}{dr} \log k_1 = 0 \quad (58)$$

Con la primera solución obtenida de la distribución de la velocidad axial las ecuaciones (55) y (56) proporcionan los valores de  $p_2/\rho_2$ , que introducidos en (57) suministran la segunda aproximación del método de iteración, y así sucesivamente.

#### 10. Problema inverso (diseño).

Como condición de diseño se tomará :

$$r_1 V_{\theta1} - r_2 V_{\theta2} = \frac{\tau}{\omega} = \text{cte.} \quad (59)$$

que es la que se utiliza con mayor frecuencia. De esta forma la energía que se toma de la corriente fluída es constante por unidad de altura, manteniéndose a la salida del rotor la misma distribución de temperaturas totales que se haya fijado a la entrada en la turbina, lo que es conveniente bajo el punto de vista de la resistencia de materiales.

Diferenciando (59) respecto a  $r_1$  y  $r_2$ , resulta :

$$\left[ V_{\theta 1} + r_1 \frac{\partial V_{\theta 1}}{\partial r_1} \right] dr_1 = \left[ V_{\theta 2} + r_2 \frac{\partial V_{\theta 2}}{\partial r_2} \right] dr_2 \quad (60)$$

o bien :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{V_{\theta 2}^2}{r_2} + V_{\theta 2} \frac{\partial V_{\theta 2}}{\partial r_2} \right] \frac{dr_2}{dr_1} &= \frac{V_{\theta 2}}{V_{\theta 1}} \frac{r_1}{r_2} \left[ \frac{V_{\theta 1}^2}{r_1} + V_{\theta 1} \frac{\partial V_{\theta 1}}{\partial r_1} \right] = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \left[ -\frac{r_1}{r_2} - \frac{\tau}{\omega r_2 V_{\theta 1}} \right] \left[ \frac{V_{\theta 1}^2}{r_1} + V_{\theta 1} \frac{\partial V_{\theta 1}}{\partial r_1} \right] \end{aligned} \quad (61)$$

Por otra parte, sustituyendo (59) en (35) queda :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}(V_{z2}^2 + V_{\theta 2}^2) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}(V_{z1}^2 + V_{\theta 1}^2) + \tau \quad (62)$$

que diferenciada respecto a  $r_1$  y  $r_2$  proporciona :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2} \right) + V_{z2} \frac{\partial V_{z2}}{\partial r_2} + V_{\theta 2} \frac{\partial V_{\theta 2}}{\partial r_2} \right] dr_2 &= \left[ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + V_{z1} \frac{\partial V_{z1}}{\partial r_1} + V_{\theta 1} \frac{\partial V_{\theta 1}}{\partial r_1} \right] dr_1 \end{aligned} \quad (63)$$

Utilizando las relaciones :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial r_2} \left( \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial r_2} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial r_1} \log \left( \frac{p_1}{\rho_1^{\gamma}} \right) \frac{dr_1}{dr_2} \quad (64)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( \frac{p_1}{\rho_1} \right) = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial r_1} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \log \left( \frac{p_1}{\rho_1^{\gamma}} \right) \quad (65)$$

$$\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial r_2} = \frac{V_{\theta 2}^2}{r_2} \quad (66) \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial r_1} = \frac{V_{\theta 1}^2}{r_1} \quad (67)$$

resulta :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{V_{\theta 2}^2}{r_2} + V_{\theta 2} \frac{\partial V_{\theta 2}}{\partial r_2} + V_{z 2} \frac{\partial V_{z 2}}{\partial r_2} \right) \frac{dr_2}{dr_1} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial r_1} \log k_1 = \\ & = \frac{V_{\theta 1}^2}{r_1} + V_{\theta 1} \frac{\partial V_{\theta 1}}{\partial r_1} + V_{z 1} \frac{\partial V_{z 1}}{\partial r_1} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \log k_1 \end{aligned} \quad (68)$$

Sustituyendo en (61) y poniendo :

$$\frac{dr_2}{dr_1} = \frac{V_{z 1} r_1}{V_{z 2} r_2} \frac{\rho_1 k_1}{\left( \frac{p_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}} \quad (69)$$

queda :

$$\begin{aligned} & \frac{r_1}{r_2} \left[ \frac{r_1}{r_2} - \frac{\tau}{\omega r_2 V_{\theta 1}} \right] \left[ \frac{V_{\theta 1}^2}{r_1} + V_{\theta 1} \frac{\partial V_{\theta 1}}{\partial r_1} \right] + V_{z 1} \rho_1 \frac{r_1}{r_2} \frac{k_1}{\left( \frac{p_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}} \frac{\partial V_{z 2}}{\partial r_2} + \\ & + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2} \frac{\partial}{\partial r_1} \log k_1 = \frac{V_{\theta 1}^2}{r_1} + V_{\theta 1} \frac{\partial V_{\theta 1}}{\partial r_1} + V_{z 1} \frac{\partial V_{z 1}}{\partial r_1} + \frac{1}{\gamma - 1} \times \\ & \times \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \log k_1 \end{aligned} \quad (70)$$

Tomando ahora,  $r_1 \sim r_2 = r$  ; y simplificando :

$$\begin{aligned} & V_{z 1} \rho_1 \frac{k_1}{\left( \frac{p_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}} \frac{\partial V_{z 2}}{\partial r} - \frac{\tau}{\omega r V_{\theta 1}} \left( \frac{V_{\theta 1}^2}{\partial r} + V_{\theta 1} \frac{\partial V_{\theta 1}}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial r} \log k_1 \left( \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) = 0 \end{aligned}$$

o bien :

$$\frac{\partial V_{z 2}}{\partial r} = \frac{1}{\rho_1 V_{z 1}} \left( \frac{p_2}{\rho_2} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \left[ \frac{\tau}{\omega r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{\theta 1}) - \right.$$

$$- \frac{1}{\gamma - 1} \left( \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) \frac{\partial}{\partial r} \log \left( \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \right) \Bigg] \quad (71)$$

Por otra parte, de (62) :

$$\frac{p_2}{\rho_2} = \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{V_{z1}^2 - V_{z2}^2}{2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\tau}{\omega r} \left( V_{\theta 1} - \frac{\tau}{2\omega r} \right) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \tau \quad (72)$$

Este sistema formado por (71) y (72) se resuelve fácilmente mediante iteración, viniendo dada, como siempre, la constante de integración mediante la ecuación :

$$\frac{G}{2\pi} = \int_{r_1}^{r_2} \rho_2 V_{z2} r dr \quad (73)$$

#### 11. *Influencia de la fricción.*

Existen numerosos trabajos en los que se estudian las pérdidas de presión debidas a efectos de fricción, estudiando tanto su valor como su distribución a lo largo de los álabes. Para fines de proyecto o de cálculos de tipo práctico no es posible considerar la distribución radial de estas pérdidas, debiendo contentarnos con el valor medio de las mismas. Indicaremos dos métodos sencillos para considerarlas, con los cuales se introduce únicamente una corrección a los métodos de cálculo que hemos desarrollado.

Mediante la teoría unidimensional se estima el valor medio de las pérdidas y con ellos el rendimiento adiabático o politrópico de la misma. Para ello se utilizan métodos bien conocidos (Aimley, Howell, etc.), según el tipo de compresor o turbina que se considere. Una vez efectuado esto puede procederse de dos maneras :

1.<sup>a</sup> Con el valor estimado del rendimiento politrópico medio se utilizan las ecuaciones anteriores, sustituyendo únicamente la ecuación :

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \quad (74)$$

por la ecuación politrópica :

$$\frac{p_1}{\rho_1^n} = \frac{p_2}{\rho_2^n} \quad (75)$$

2.<sup>a</sup> Mediante la teoría unidimensional, considerando las pérdidas friccionales, se determinan los valores medios  $V_{z2}$ ,  $V_{\theta 2}$ ,  $p_2$  y  $\rho_2$ . Estos valores se admite que se producen en el radio  $r_2$  (radio que divide la sección anular

en dos partes de igual área). Estos valores medios son los que proporcionan directamente la constante de integración de la ecuación diferencial resultante, sirviendo como valores de partida en los métodos de iteración. Por tanto, la ecuación de continuidad :

$$G = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho_2 V_{z2} r_2 dr_2 \quad (76)$$

no se utiliza más que para corregir, si fuese necesario, la altura previamente estimada de los álabes mediante la teoría unidimensional.

#### REFERENCIAS

- 1.—CHUNG-HUA WU : «A General Theory of Three-Dimensional Flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of Axial-Radial and Mixed-Flow Types», *NACA*, TN 2604, 1952.
- 2.—STANITZ, J. D. : «Approximate Design Method for High-Solidity Blade Elements in Compressors and Turbines», *NACA*, TN 2408, 1951.
- 3.—STODOLA, A. : *Steam and Gas Turbines*, P. Smith, New York, 1945, vol. II, páginas 990-992.
- 4.—HAMRICK, J. T. ; GINGSBURG, A, y OSBORN, W. M. : «Method of Analysis for Compressible Flow through Mixed-Flow Centrifugal Impellers of Arbitrary Design», *NACA*, TN 2165, 1950.
- 5.—HOLMQUIST, C. O. : *An Approximate Method of Calculating Three-Dimensional Compressible Flow in Axial Turbomachines*. California Institute of Technology, 1953.
- 6.—BOWEN, J. T. ; SABERSKY, R. H., y RANNIE, W. D. : *Theoretical and Experimental Investigations of Axial Flow Compressors*. California Institute of Technology, 1951.